

文章编号: 1000-8055(2004) 03-0314-06

金属橡胶材料的理论模型研究

郭宝亭¹, 朱梓根¹, 崔荣繁², 庞 为²
(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083;
2. 沈阳黎明航发集团公司 技术中心, 沈阳 110043)

摘要: 金属橡胶因此类金属构件具有类似橡胶的弹性而得名。本文从金属橡胶的成型工艺特点出发, 以弹簧理论为基础, 通过建立金属橡胶材料的力学模型, 对材料的刚度特性进行理论分析, 给出了金属橡胶材料的本构关系, 为开发金属橡胶材料的产品设计与应用提供理论依据。

关键词: 航空、航天推进系统; 金属橡胶; 模型; 成型非受压面; 非线性
中图分类号: V 231. 9 文献标识码: A

Theoretical Model of Metal-Rubber

GUO Bao-ting, ZHU Zi-gen, CUI Rong-fan

(1. School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, China;

2. Shenyang LiMing Aeroengine Group Corporation LTD, Shenyang 110043, China)

Abstract: Metal-Rubber (MR) is a metal material, and its elasticity is similar to that of rubber. The paper, based on MR traits of forming technics and spring theory, demonstrates the mechanic model of MR and studies the rigidity characteristics through theoretic method. Besides, the paper presents the constitutive relation of MR, which is significant for the MR product designs and applications.

Key words: aerospace propulsion system; Metal-Rubber (MR); model;
forming nonpressing-surface; nonlinear

金属橡胶材料是由金属丝制成的。它的主要制作过程是先将金属丝绕成螺旋状的弹簧形状, 经过拉伸、编织后, 放入模具中压制成型 (如图1)。金属橡胶压制成型后, 金属丝之间相互缠绕, 在一定程度上有某种规则性, 在金属橡胶的成型受压面上, 金属丝多为平行受压面分布 (如图2)。其中图2 (a) 是在成型时受压面金属丝排列图, 图2 (b) 是成型非受压面金属丝排列图。从图2金属橡胶中金属丝的排布可以看出, 在金属橡胶的成型受压面上, 金属丝多为平行受压面分布。因此,



图1 金属橡胶阻尼器
Fig. 1 MR Damper

收稿日期: 2003- 07- 08; 修订日期: 2004- 05- 10

作者简介: 郭宝亭 (1963-), 男, 辽宁沈阳人, 北京航空航天大学能源与动力工程学院博士后, 主要从事转子动力学、结构强度及振动试验技术研究

金属橡胶是一种非各向同性材料。

根据以上对金属橡胶材料的观察分析，可以将杂乱的金属丝看成许多分层的微小弹簧，小弹簧的形状各不相同，但主要可看成是与成型压力面有一小角度 α （即螺旋角）的小曲梁。每个小弹簧都具有一定刚度，它们的共同作用形成宏观上金属橡胶总的刚度特性。金属橡胶在受外力时，小弹簧之间的相互滑移产生的摩擦必然消耗部分能量，这是金属橡胶具有阻尼作用的原因。

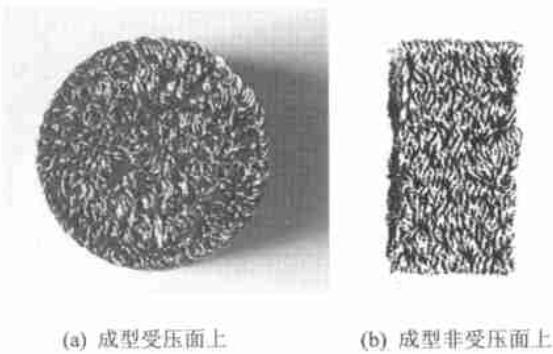


图2 不同成型面中金属丝的排布

Fig. 2 Arranging wire on different forming-surface

微元弹簧之间的相互挤压也是随变形量的增加而增大的，这种挤压作用限制了微元弹簧之间的相对位移，因而随着变形量的增加有越来越多的微元弹簧将会失效，失效的微元弹簧没有变形空间，其结构刚度相对于未失效的微元弹簧可看成是无穷大。

1 单元体模型

在实际应用中，许多元件处于复杂的应力状态。除了拉压，还会有扭转、弯曲、剪切等形式的受力载荷等。如环型金属橡胶减振器作为支承元件时，往往处于平面应力状态（见图3）。

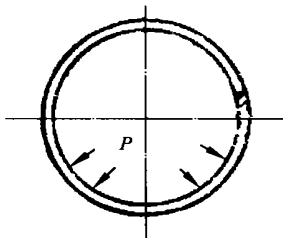


图3 环型金属橡胶受力状态

Fig. 3 Ring MR forcing state

对于环型金属橡胶减振器，就材料本身而言，它是一种疏松结构的金属材料，在材料力学中，它的密实性或连续性是不能够被忽略的。而就其制作工艺而言，在整个构件体积内是均匀的。而它在压制方向和非压制方向上，具有不同的力学性能，属于正交各向异性（确切地说属于工艺正交各向异性）材料。

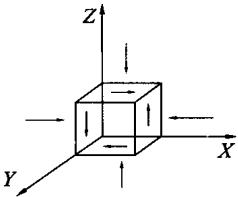


图4 “微单元体”应力情况

Fig. 4 "Micro-cell" stress

为了研究环型金属橡胶的受力状态，可以借助材料力学中的方法，切取一个小“微单元体”，其应力状况如图4所示。其中与 Z 轴垂直的面即 $X-Y$ 面为受压面，与 X 、 Y 轴垂直的面即 $Y-Z$ 面、 $X-Z$ 面为非受压面。这里切取的小“微单元体”，以其在很小的体积内的平均力学性能，接近整个试件的平均力学性能为准。为了研究金属橡胶材料的宏观性能，作为工程方法，我们假定其为连续的、均匀的介质模型。且仅考虑其工艺正交各向异性。在微单元体中，假设金属橡胶材料在单位面积上有 n 个这样的微元弹簧，在单位长度上有 m 层弹簧，显然 n 、 m 与金属橡胶的密度有关，对于每一层上的小弹簧，其相互关系为并联关系，对于各层之间的弹簧则为串联关系。因此，对于每一层的等效刚度及总的等效刚度分别为：

$$K_n = \sum_{i=1}^n K_i$$
$$K_{mn} = \frac{\prod_{j=1}^m K_{nj}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m K_{nj}} \tag{1}$$

由于各微元弹簧的形态各不一样，一般其刚度系数也不相同，但总的来说存在一个统计上的均值，假定以其均值作为刚度系数，可将微元弹簧的刚度看成是一样的，这样（1）式就变为：

$$K_n = nK_i = nK$$

$$K_{mn} = \frac{K_{nj}^m}{mK_{nj}^{m-1}} = \frac{K_{ij}}{m} = \frac{nK_i}{m} = \frac{n}{m} K \tag{2}$$

因此，对于金属橡胶材料，力和位移的关系

为:

$$P = K_{mn} \Delta = \frac{n}{m} K \Delta$$

$$\sigma = \frac{n}{m} K \epsilon \quad (3)$$

(3) 式即为金属橡胶的本构关系。

假定金属橡胶材料的密度为 ρ_{MR} , 这是在金属橡胶成型过程中易控制的量。金属丝材料的密度为 ρ_s , 丝直径为 d_s , 螺旋直径为 D_1 , 金属橡胶材料的体积为 V_{MR} , 金属丝的体积为 V_s , 则金属橡胶的质量为:

$$M_{MR} = \rho_{MR} V_{MR} = \rho_s V_s = \rho_s L_s \frac{\pi d_s^2}{4}$$

式中, L_s 为金属丝的长度。由此得出金属丝的长度为:

$$L_s = \frac{4\rho_{MR} V_{MR}}{\rho_s \pi d_s^2}$$

金属丝的螺旋圈数为 $L_s \cos \alpha / 2\pi R_1$, 根据对微元弹簧的假设, 金属橡胶体积为 V_{MR} 内总的弹簧螺旋圈数为:

$$n \cdot m = \frac{L_s \cos \alpha}{2\pi R_1} = \frac{2\rho_{MR} V_{MR} \cos \alpha}{\rho_s \pi d_s^2 R_1} = \frac{4\rho_{MR} V_{MR} \cos \alpha}{\rho_s \pi d_s^2 D_1}$$

由于在金属橡胶材料内部微元弹簧是均匀分布的。在3个相互垂直方向上的排列是等概率分布的。为了使量纲保持一致, 以及推导上的方便。这里引用一些符号:

U_V —— 单位体积;

U_A —— 单位面积;

U_L —— 单位长度, 其值均为1。

且有如下关系:

$$U_L = \frac{1}{U_A} = \frac{1}{U_V}$$

所以, 在一立方体的单位体积内螺旋圈数:

$$M_{MR} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\rho_{MR} \cos \alpha U_V}{d_s^2 D_1}$$

其中:

$$p = \frac{\rho_{MR}}{\rho_s}$$

而单位面积上的螺旋圈数 n 、单位厚度上的层数 m 分别为:

$$n = \frac{3}{M_{MR}^2}; \quad m = \frac{3}{M_{MR}}$$

则有:

$$\frac{n}{m} = \frac{3}{M_{MR}} = \frac{3}{\pi^2} \frac{\rho_{MR} \cos \alpha U_V}{d_s^2 D_1} = \frac{U_L}{d_s} \frac{3 \rho_{MR} \cos \alpha}{c}$$

对于单元体来说, 作用在受压面和非受压面上载荷的情况所反映的本构关系也不尽相同。

2 不同成型面的受力变形分析

当金属橡胶成型受压面受载荷作用时, 随着变形量的不断增大, 弹簧之间相互啮合、互相作用。相邻两整圈弹簧之间相互作用时(这里暂时不考虑单元体内部的滑移现象), 也就是进入了挤压阶段, 它的模型相当于一固定在圆柱面上的悬臂梁^[3], 如图5所示。随着变形量的不断增大, 悬臂

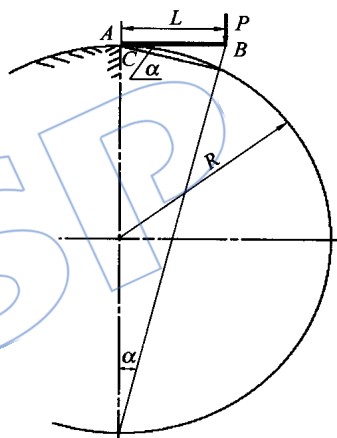


图5 悬臂梁模型

Fig. 5 Cantilever-girder model

梁的长度不断减小, 直至悬臂梁的自由端与圆柱面接触。此时, 单元体内的微元弹簧全部失效, 没有变形空间。在这里, 圆柱面是以弹簧的螺旋直径 D_1 为弦长, 以螺旋角 α 为弦切角形成的。

所以, 悬臂梁的长度为:

$$L = \frac{D_1}{\cos \alpha}$$

而整圈弹簧的长度与悬臂梁的长度的关系为:

$$l = \frac{\pi D_1}{\cos \alpha} = \pi L$$

圆柱面的半径为:

$$R = \frac{1}{2} \frac{D_1}{\sin \alpha}$$

由文献[1]得知: 单元体受载荷作用后而变形, 在进入挤压阶段时, 载荷与位移的关系为:

$$\Delta_2 = \frac{cd_s}{\sin\alpha} |\Delta\alpha|^2 - 2 \frac{cd_s}{\cos\alpha} |\Delta\alpha| - \frac{64Pc^3}{3E\pi d_s} \left[\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{|\Delta\alpha|}{\sin\alpha} \right]^3 \quad (4)$$

式中: $c = \frac{D_1}{d_s}$ 为弹簧指数或旋绕比; P 为载荷; E 为弹性模量。

在单元体进入挤压阶段前, 载荷与变形之间的关系, 分两种情况分析。对于第一种情况, 即弹簧两端有相对转动时:

$$k_1 = \frac{P}{\Delta} = \frac{P_\alpha}{\Delta_\alpha} \quad (5)$$

$$K_{mn1} = \frac{n}{m} k_1$$

第二种情况, 即弹簧两端无相对转动时

$$k_2 = \frac{P}{\Delta} = \frac{P_\alpha}{\Delta_\alpha} \quad (6)$$

$$K_{mn2} = \frac{n}{m} k_2$$

对于单元体, 当其受压面作用有载荷时, 在单元体内部弹簧的变形情况比较复杂。既有弹簧自身的变形; 也有弹簧之间相互啮合、相互挤压作用时的变形。既有弹簧两端无相对转动的变形; 也有弹簧两端有相对转动的变形。在总的变形中, 存在着多种情况的变形, 而各种变形情况在总变形中所占比例, 可以通过试验来确定。因此, 单元体的变形有两部分组成: 挤压接触前的变形 Δ_f 和挤压接触后的变形 Δ_b 。而对于挤压接触前的载荷与变形的关系有:

$$K_{jf} = A_{jf} K_{mn1} + B_{jf} K_{mn2} \quad (7)$$

其中: A_{jf} 和 B_{jf} 为待定系数。

此时有:

$$\Delta_f = \frac{P}{K_{jf}}$$

当单元体受载荷的作用, 弹簧进入挤压接触阶段后, 其变形关系为:

$$k_{j2} = \frac{P}{\Delta_2} \quad ; \quad K_{jb} = \frac{n}{m} k_{j2} \quad ;$$

$$\Delta_b = \frac{P}{K_{jb}} \quad (8)$$

而对于单元体的受载变形关系为:

$$\Delta_1 = A_1 \Delta_f + B_1 \Delta_b \quad (9)$$

这里 A_1 和 B_1 为待定系数。

$$\Delta_1 = \frac{P}{K_1} = A_1 \frac{P}{K_{jf}} + \frac{P}{K_{jb}}$$

$$P = \frac{1}{\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}}} \Delta_1 = K_1 \Delta_1 \quad (10)$$

所以, 对于单位单元体, 则有:

$$\sigma_1 = \frac{P}{U_A} = \frac{K_1 \Delta_1}{U_A} = \frac{K_1}{U_L} \frac{\Delta_1}{U_L} = \frac{K_1}{U_L} \epsilon_1 = \frac{1}{U_L \left(\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}} \right)} \epsilon_1 = E_1 \epsilon_1 \quad (11)$$

其中:

$$E_1 = \frac{1}{U_L \left(\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}} \right)} \quad (12)$$

式 (11) 即为单元体受压面加载时, 金属橡胶材料的本构关系。

当单元体的非受压面受载荷作用时, 在单元体中的弹簧圈将产生的径向变形分为两种情况, 即弹簧圈将被“压扁”变形和“串动”变形。随着变形量的不断增大, 在单元体中, 弹簧圈之间相互啮合、互相作用。而当微元弹簧相互接触时, 弹簧圈的变形空间愈来愈小, 直至没有了变形空间。同单元体受压面加载情况的分析相类似。

$$P = \frac{1}{\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}}} \Delta_2 = K_2 \Delta_2 \quad (13)$$

所以, 对于单位单元体, 则有:

$$\sigma_2 = \frac{P}{U_A} = \frac{K_2 \Delta_2}{U_A} = \frac{K_2}{U_L} \frac{\Delta_2}{U_L} = \frac{K_2}{U_L} \epsilon_2 = \frac{1}{U_L \left(\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}} \right)} \epsilon_2 = E_2 \epsilon_2 \quad (14)$$

其中:

$$E_2 = \frac{1}{U_L \left(\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}} \right)} \quad (15)$$

式 (14) 即为单元体非受压面加载时, 金属橡胶材料的本构关系。

为便于工程应用, 可将前面的参数关系做一简化。

在公式 (5) 和 (6) 中:

$$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{P_\alpha}{\Delta_\alpha} \quad (16)$$

其中 P_α 和 Δ_α 可根据弹簧理论^[2] 分别给出。从式中可以看出 k_1 是随着 $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ 的变化而变化的。其中 α 为金属橡胶材料成型后, 单元体内螺旋弹簧的初始螺旋角。元件定型后 α 为常数。而 α' 为单元体受载变形后, 单元体内螺旋弹簧的螺旋角。分析上述式中及同量纲 $\Delta\alpha$ 的阶次^[1], 对于第一种情况公式 (16) 可简化为:

$$k_1 = \frac{P}{\Delta} = \frac{P_{\alpha}}{\Delta\alpha} =$$

$$a_1 \frac{Ed_s}{c^3} \frac{1}{\Delta\alpha} = a_1 \bar{k} \frac{1}{\Delta\alpha} \quad (17)$$

其中: $\bar{k} = \frac{Ed_s}{c^3}$; a_1 为待定系数。

同理对于第二种情况式 (16) 可简化为:

$$k_2 = \frac{P}{\Delta} = \frac{P_{\alpha}}{\Delta\alpha} = b_1 \frac{Ed_s}{c^3} = b_1 \bar{k} \quad (18)$$

式中: b_1 为待定系数。

将公式 (17) 和 (18) 分别代入公式 (5) 和 (6) 中, 整理后再代入公式 (7) 中得:

$$K_{jf} = A_{jf} \frac{n}{m} a_1 \bar{k} \frac{1}{\Delta\alpha} + B_{jf} \frac{n}{m} b_1 \bar{k} =$$

$$\frac{n}{m} \bar{k} \left(A_{jf} \frac{1}{\Delta\alpha} + B_{jf} \right) \quad (19)$$

式中: A_{jf} 和 B_{jf} 为待定系数。

同理考虑公式 (4) 和 (8) 可得:

$$K_{jb} = \frac{n}{m} k_{j2} = a_2 \frac{n}{m} \frac{3EI}{(L-s)^3} =$$

$$\frac{n}{m} \bar{k} \frac{1}{(A_{jb} - \Delta\alpha)^3} \quad (20)$$

式中: A_{jb} 为待定系数。

因此, 螺旋弹簧在进入挤压阶段前、后, 载荷与变形、应力与应变的关系为:

$$P_{jf} = K_{jf} \Delta f = \frac{n}{m} \bar{k} \left(A_{jf} \frac{1}{\Delta\alpha} + B_{jf} \right) \Delta f$$

$$\sigma_{jf} = E_{jf} \epsilon_f = \frac{n\bar{k}}{mU_L} \left(A_{jf} \frac{1}{\Delta\alpha} + B_{jf} \right) \epsilon_f \quad (21)$$

$$P_{jb} = K_{jb} \Delta b = \frac{n}{m} \bar{k} \frac{1}{(A_{jb} - \Delta\alpha)^3} \Delta b$$

$$\sigma_{jb} = E_{jb} \epsilon_b = \frac{n\bar{k}}{mU_L} \frac{1}{(A_{jb} - \Delta\alpha)^3} \epsilon_b \quad (22)$$

将公式 (19)、(20) 代入式 (12) 后, 整理得:

$$E_1 = \frac{1}{U_L \left(\frac{A_1}{K_{jf}} + \frac{B_1}{K_{jb}} \right)} = A \frac{n}{m} \frac{\bar{k}}{U_L} \cdot$$

$$\frac{B + \Delta\alpha}{(B + \Delta\alpha)(C - |\Delta\alpha|)^3 + D\Delta\alpha} \quad (23)$$

式中 A , B , C 和 D 为待定系数; $\Delta\alpha$ 为单元体中弹簧螺旋角的变化量, 且:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta_s}{cd_s} = \frac{\Delta_1}{mcd_s} = \frac{U_L \epsilon_1}{mcd_s} \quad (24)$$

其中: Δ_s 和 Δ_1 分别为单圈弹簧和单元体的变形量; m 为单位长度上的层数。

从式 (17) 中可以看出, 当金属橡胶元件确定后, $\Delta\alpha$ 与 Δ 是成正比的关系。那么:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 = A \frac{n}{m} \frac{\bar{k}}{U_L} \cdot$$

$$\frac{B + S_1 \epsilon_1}{(B + S_1 \epsilon_1)(C - S_1 |\epsilon_1|)^3 + DS_1 \epsilon_1} \epsilon_1 \quad (25)$$

其中 $S_1 = \frac{U_L}{mcd_s}$ 单位为无量纲。

式 (25) 为金属橡胶材料, 在成型受压面受载荷作用时的应力—应变关系。

同理, 对于成型非受压面, 也可将参数关系也做一简化。根据弹簧理论^[2]有:

$$k_1' = \frac{P_r}{\Delta} = 1 \sqrt{\frac{2c^3}{Ed_s \cos \alpha}}$$

$$[2\pi \tan^2 \alpha + (1 + \pi) \mu \sin^2 \alpha + 1] = a_1' \bar{k} \quad (26)$$

从前面的分析可知“串动”变形主要是由弹簧螺旋径的变化引起的。由弹簧理论^[2]载荷与变形的关系给出如下形式:

$$k_2' = b_1' \frac{Ed_s}{c^3} \frac{1}{\Delta\alpha^2} = b_1' \bar{k} \frac{1}{\Delta\alpha^2} \quad (27)$$

$$K_{jf}' = K_{mn}' = A_{jf}' K_{mn1}' + B_{jf}' K_{mn2}' =$$

$$\frac{n}{m} (A_{jf}' K_1' + B_{jf}' K_2') = \frac{n}{m} \bar{k} \cdot$$

$$\left(A_{jf}' a_1' + B_{jf}' b_1' \frac{1}{\Delta\alpha^2} \right) \quad (28)$$

$$\sigma_{jf}' = \frac{n\bar{k}}{mU_1} \left(A_{jf}' a_1' + B_{jf}' b_1' \frac{1}{\Delta\alpha^2} \right) \epsilon_{jf}' \quad (29)$$

其中: $\bar{k} = \frac{Ed_s}{c^3}$; a_1' 和 b_1' 为待定系数。而 K_{jb}' 由式 (20) 给出。

将其代入式 (15) 后整理得:

$$E_2 = \frac{A_1' K_{jf}' + B_1' K_{jb}'}{U_L} = A \frac{n}{m} \frac{\bar{k}}{U_L} \cdot$$

$$\frac{B' + \Delta\alpha^2}{(B' + \Delta\alpha^2)(C' - |\Delta\alpha|)^3 + D\Delta\alpha^2} \quad (30)$$

式中 A' , B' , C' 和 D' 为待定系数; $\Delta\alpha$ 为单元体中弹簧螺旋角的变化量, 且:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta_s}{cd_s} = \frac{\Delta_2}{mcd_s} = \frac{U_L \epsilon_2}{mcd_s} \quad (31)$$

其中, Δ_s 和 Δ_2 分别为单圈弹簧和单元体的变形量; m 为单位长度上的层数。那么:

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_2 = A \frac{n}{m} \frac{\bar{k}}{U_L} \cdot$$

$$\frac{B + (S_1 \epsilon)^2}{[B + (S_1 \epsilon)^2](C - S_1 |\epsilon|)^3 + D(S_1 \epsilon)^2} \epsilon$$

(32)

其中: $S_1 = \frac{U_L}{mcd_s}$ 单位为无量纲。

式 (32) 为金属橡胶材料, 在成型非受压面受载荷作用时的应力—应变关系。

从前面的分析情况可以看出, 对于金属橡胶单元体, 成型受压面与非受压面所反映的力学特性是不同的, 这说明了金属橡胶材料不是各向同性的。

3 结 论

以弹簧理论为基础, 分析了以微元弹簧为基本元件的金属橡胶材料的减振机理。建立了微元弹簧在载荷的作用下, 以及微元弹簧两端不同的

边界条件时的载荷与变形的关系。总结出金属橡胶单元体在成型受压面和非受压面作用载荷时, 金属橡胶单元体的应力应变关系。结果表明: 金属橡胶材料不是各向同性的。并给出了在工程实际应用时的简化近似模型。

参考文献:

[1] 郭宝亭. 金属橡胶阻尼器性能和在转子系统减振应用研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2002.

[2] 张英会, 罗圣国, 郭荣生, 等编著. 弹簧 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1980.

[3] 邓剑波. 新型结构的理论与应用实验研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 1997.

